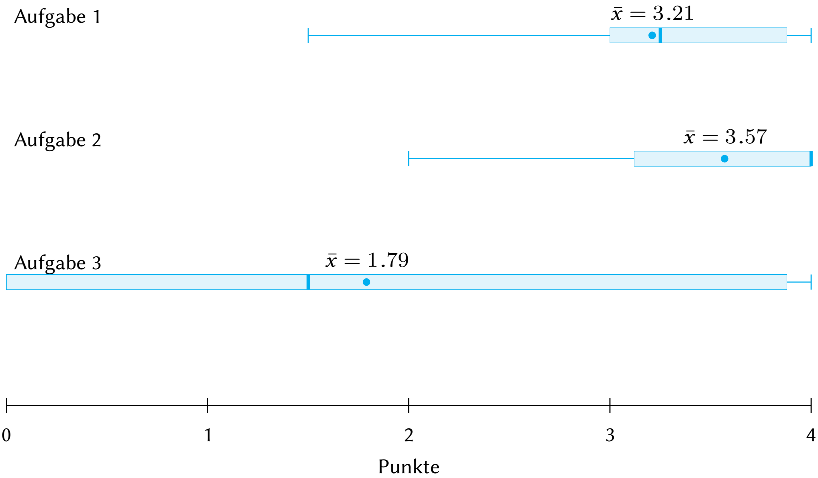
Theoretische Grundlagen der Informatik

Tutorium 11
Moritz Klammler

Wintersemester 2013/14
10. Dezember 2013

3. Übungsblatt (14 gültige Abgaben)



Anmerkungen zum 3. Übungsblatt

- Übungsblätter bitte sorgfältig aufbewahren (Beweismittel für Euch).
- Eure Beweise sind bereits deutlich besser geworden.
- Bitte immer einen nachvollziehbaren Rechenweg mit angeben.
- Bei Keller- und sonstigen Automaten am besten eine Legende anfertigen.

Tagesthemen

- Beweise
- Formale Logik
- Entscheidbarkeit

Karlsruhe ist nicht genug

1. Es gilt $\epsilon \in L(G)$ und $|\epsilon|_{\downarrow} - |\epsilon|_{\uparrow} = 0$
2. Sei nun $n \in \mathbb{N}_0$ beliebig aber fest, sodass $S \Rightarrow^* SA^{\boldsymbol{n}}$.
3. ...

Alle Pferde haben dieselbe Farbe

1. Jede Menge von $n = 1$ Pferden enthält nur Pferde derselben Farbe.

2. Für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}$ gelte, dass jede Menge M von Pferden mit $|M| \leq n$ nur Pferde derselben Farbe enthält.

3. Sei nun eine beliebige aber feste Menge von Pferden $M' = \{p_1, p_2, p_3, \ldots, p_{n+1}\}$ mit $|M'| = n + 1$ gegeben.

   Partitioniere M' in $X = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ und $Y = \{p_2, p_3, \ldots, p_{n+1}\}$.

   Da $|X| = |Y| = n$, gilt nach Voraussetzung, dass sowohl X als auch Y jeweils nur Pferde derselben Farbe enthalten. Also $\text{color}(p_i) = C_X$ für $i = 1, 2, \ldots, n$ und $\text{color}(p_i) = C_Y$ für $i = 2, 3, \ldots, n + 1$.

   Da es aber ein Pferd p gibt, sodass $p \in X \wedge p \in Y$, muss $C_X = C_Y$ gelten. Also haben auch alle Pferde in M' dieselbe Farbe.

Formale Logik

- Formel
- Satz
- Modell
- Theorie

Formel

- Variablen $v_1, v_2, \ldots$
- *n*-stellige Relationen (zwischen Variablen) $R_1, R_2, \ldots$
- Klammern $(,)$
- Logische Operatoren $\wedge, \vee, \neg$
- Quantoren $\forall, \exists$

Die Sprache der syntaktisch korrekten Formeln ist trivial (oder zumindest entscheidbar).

Satz

Sei ϕ eine Formel mit den Variablen $v_1, v_2 \ldots, v_n$.

ϕ ist ein *Satz* genau dann wenn alle v_i in Quantoren *gebunden* sind.

Modell

Ein *Modell* besteht aus

- einem *Universum* (Menge) von möglichen Variablenbelegungen

$$\mathbb{B}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \ldots$$

- einer *semantischen* Definition für eine Menge von Relationen

$$R(x, y, z) \equiv (x + y = z)$$

Theorie

Sei M ein Modell. Die Menge

$$\mathsf{Th}(M) = \{\phi : \phi \text{ ist ein wahrer Satz in } M\}$$

von wahren Sätzen in M heißt *Theorie*.

Frage: Für welche M ist $\mathsf{Th}(M)$ entscheidbar?