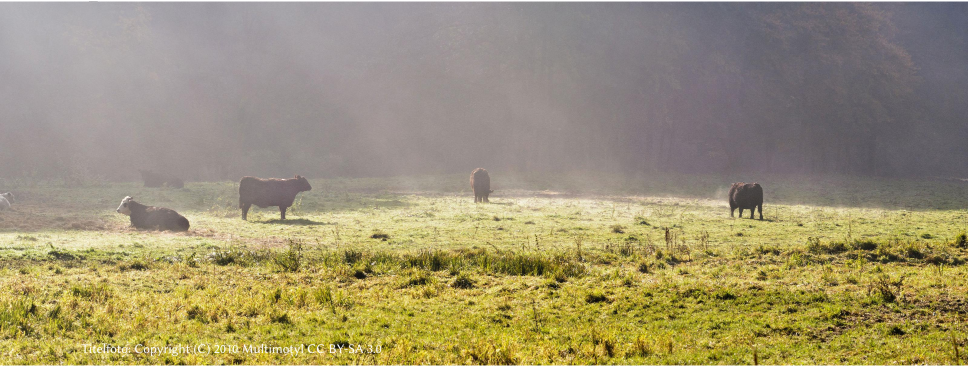
Theoretische Grundlagen der Informatik

Tutorium 7
Moritz Klammler

Wintersemester 2014/15
27. Januar 2015



Organisatorisches

Bitte meldet Euch zur Klausur an.

Tagesthemen

- Kellerautomaten
  aka Stack-Maschinen, aka Push-Down-Automata (PDAs), aka …
- Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen
- Ogdens Lemma
- Greibach-Normalform für kontextfreie Grammatiken
- Ein paar schöne Beispiele

Kellerautomaten

Ein **Kellerautomat** ist ein 7-Tupel $\mathcal{K} = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, \$, \delta, F)$ mit

- einer endlichen Zustandsmenge Q,
- einem Eingabealphabet Σ,
- einem Kelleralphabet Γ,
- einem Startzustand $q_0 \in Q$,
- einem Symbol $\$ \in \Gamma$, das anfänglich auf dem Stack liegt,
- einer Zustandsübergangsrelation
  $\delta \subseteq \Big(Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \times \Gamma \cup \{\epsilon\})\Big) \times \Big(Q \times \Gamma^*\Big)$ und
- einer (auch leeren) Menge von akzeptierenden Zuständen $F \subseteq Q$.

Kellerautomaten

Ein Kellerautomat $\mathcal{K} = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, \$, \delta, F)$ akzeptiert die Sprachen

- $L_F(\mathcal{K}) \subseteq \Sigma^*$ aller Wörter $w \in \Sigma^*$ für die ein Berechnungspfad in $\mathcal{K}$ existiert, an dessen Ende sich $\mathcal{K}$ in einem **akzeptierenden Zustand** befindet bzw
- $L_\epsilon(\mathcal{K}) \subseteq \Sigma^*$ aller Wörter $w \in \Sigma^*$ für die ein Berechnungspfad in $\mathcal{K}$ existiert, an dessen Ende $\mathcal{K}$ in einer Konfiguration mit **leerem Stack** ist.

Im Allgemeinen ist $L_Q(\mathcal{K}) \neq L_\epsilon(\mathcal{K})$.

Kellerautomaten

Die Menge der von (nichtdeterministischen) Kellerautomaten akzeptierten Sprachen ist genau die Menge der kontextfreien Sprachen.

Die Menge der von deterministischen Kellerautomaten akzeptierten Sprachen ist eine echte Teilmenge der kontextfreien Sprachen.

Pumping-Lemma für reguläre Sprachen

Sei Σ ein Alphabet und $L \subseteq \Sigma^*$ eine reguläre Sprache.

Dann existiert ein $p \in \mathbb{N}$ sodass für alle $w \in L$ mit $|w| \geq p$ gilt:

Es existieren $u, x, y \in \Sigma^*$, sodass

1. $w = xuy$,
2. $|u| \geq 1$,
3. $|xu| \leq p$ und
4. $\forall i \in \mathbb{N}_0 : xu^iy \in L$.

Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen

Sei Σ ein Alphabet und $L \subseteq \Sigma^*$ eine kontextfreie Sprache.

Dann existiert ein $p \in \mathbb{N}$ sodass für alle $w \in L$ mit $|w| \geq p$ gilt:

Es existieren $u, v, x, y, z \in \Sigma^*$, sodass

1. $w = xuyvz$,
2. $|uv| \geq 1$,
3. $|uyv| \leq p$ und
4. $\forall i \in \mathbb{N}_0 : xu^iyv^iz \in L$.

Ogdens-Lemma für kontextfreie Sprachen

Sei Σ ein Alphabet und $L \subseteq \Sigma^*$ eine kontextfreie Sprache.

Dann existiert ein $p \in \mathbb{N}$ sodass für alle $w \in L$ mit $|w| = n \geq p$ gilt:

Für alle Arten, $k \geq p$ Zeichen in w zu markieren, existieren $u, v, x, y, z \in \Sigma^*$, sodass

1. $w = xuyvz$,
2. uv enthält mindestens 1 markiertes Zeichen,
3. uyv enthält höchstens p markierte Zeichen und
4. $\forall i \in \mathbb{N}_0 : xu^iyv^iz \in L$.

Das „normale" Pumping-Lemma ergibt sich für den Spezialfall $k = n$.

Wiederholung

Chomsky-Normalform

Sei $G = (T, V, S, P)$ eine kontextfreie Grammatik. G ist in **Chomsky-Normalform (CNF)** genau dann wenn für alle $(\alpha, \beta) \in P$ gilt, dass

- $\alpha \in V$ und
- $\beta \in V^2 \cup T$.

Außerdem ist „manchmal" der Spezialfall $\alpha = S$ und $\beta = \epsilon$ erlaubt, wenn S nie auf der rechten Seite einer Produktion steht.

Für jede kontextfreie Grammatik $G_1 = (T, V_1, S_1, P_1)$ (mit $\epsilon \notin L(G_1)$) existiert eine kontextfreie Grammatik $G_2 = (T, V_2, S_2, P_2)$ in Chomsky-Normalform, sodass $L(G_1) = L(G_2)$.

Greibach-Normalform

Sei $G = (T, V, S, P)$ eine kontextfreie Grammatik. G ist in **Greibach-Normalform (GNF)** genau dann wenn für alle $(\alpha, \beta) \in P$ gilt, dass

- $\alpha \in V$ und
- $\beta \in TV^*$.

Außerdem ist „manchmal" der Spezialfall $\alpha = S$ und $\beta = \epsilon$ erlaubt, wenn S nie auf der rechten Seite einer Produktion steht.

Für jede kontextfreie Grammatik $G_1 = (T, V_1, S_1, P_1)$ mit $\epsilon \notin L(G_1)$ existiert eine kontextfreie Grammatik $G_2 = (T, V_2, S_2, P_2)$ in Greibach-Normalform, sodass $L(G_1) = L(G_2)$.